Politecnico di Milano – Sede di Cremona
Anno Accademico 2023/2024

Reti Logiche – Esame – 17.06.2024

Prof. Carlo Brandolese

Cognome ________________________ **Nome** ________________________

Matricola ________________________ **Firma** ________________________

Istruzioni

1. Scrivere con cura, negli spazi sopra segnati, il proprio cognome, nome, numero di matricola e apporre la firma.
2. È vietato consultare libri, eserciziari, appunti ed utilizzare la calcolatrice e qualunque strumento elettronico (inclusi i cellulari), pena l'invalidazione del compito.
3. Il testo, debitamente compilato, deve essere riconsegnato in ogni caso.
4. Il tempo della prova è di 2 ore

Valutazione

Domanda	Voto	Note
A		
B		
C		
D		

TEMA D'ESAME

Domanda A

Date le due seguenti funzioni:

$$f(x,y,z) = \bar{x}y + xz$$
$$g(x,y) = \bar{x} + y$$

si svolgano i seguenti punti:

1. Si ricavi l'espressione della funzione $h(x,y,z) = f(g(x,y), g(y,z), g(x,z))$

$$f(g(x,y), g(y,z), g(x,z)) =$$
$$\overline{(\bar{x}+y)}(\bar{y}+z) + (\bar{x}+y)(\bar{x}+z) =$$
$$x\bar{y}(\bar{y}+z) + \bar{x}+yz =$$
$$x\bar{y} + \cancel{x\bar{y}z} + \bar{x} + yz =$$
$$\bar{x} + x\bar{y} + yz = \bar{x} + \bar{y} + yz = \bar{x} + \bar{y} + z$$

2. Si dimostri che se $\bar{x} = y$ la funzione $h(x,y,z)$ assume un valore costante
3.

se $\bar{x} = y$

$h(x, \bar{x}, z) = \bar{x} + \bar{\bar{x}} + z = \bar{x} + x + z = 1$ CVD

Domanda B

Sia $X = [\, x_1\ x_0]$ un numero intero positivo rappresentato in codifica binaria naturale. Si vuole realizzare una rete in grado di calcolare il valore $Z = 4^X + 18X$, espresso su un numero di bit sufficiente a rappresentare correttamente tutti i possibili valori di Z. A tale scopo si svolgano i seguenti punti:

1. Procedendo in modo strutturale, utilizzando componenti noti e cercando di minimizzare l'area di tale rete

1) Per prima cosa conviene elaborare l'espressione per ottenerne una forma più adatta all'implementazione:

$$Z = 4^X + 18X = (2^2)^X + 16X + 2X =$$
$$= 2^{(2X)} + 16X + 2X.$$

Per il calcolo di $2^{(2X)}$ notiamo che:

$$2^X = 2^{[x_1 x_0]} = [t_3 t_2 t_1 t_0]$$

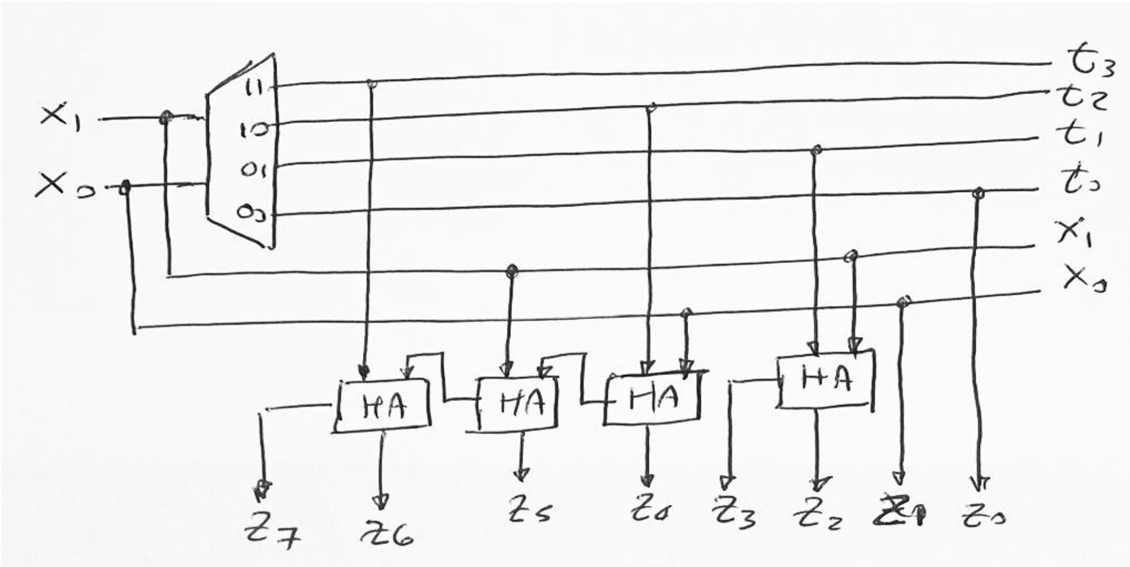
poiché $max(X) = 3$ quindi 2^X al più vale 8. Si nota facilmente che:

$$2^{2X} = 2^{[x_1 x_0 \emptyset]} = [t_3 \emptyset t_2 \emptyset t_1 \emptyset t_0]$$

A questo punto è possibile esprimere l'espressione richiesta in termini binari come segue:

	(C7)	(C6)	(C5)		(C3)			
4^X		t_3	0	t_2	0	t_1	0	t_0
$16X$		0	x_1	x_0	0	0	0	0
$2X$		0	0	0	0	x_1	x_0	0
	C_7	HA	HA	HA	C_3	HA	x_0	t_0

Ricordando che l'elevamento a potenza della base 2 si realizza con un decoder si ottiene l'architettura finale:



2. Procedendo in modo rigoroso, realizzando una rete su due livelli

Per la sintesi rigorosa su due livelli è necessario costruire la tabella della verità:

x_1x_0	x	4^x	$18x$	z	z_6	z_5	z_4	z_3	z_2	z_1	z_0
00	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
01	1	4	18	22	0	0	1	0	1	1	0
10	2	16	36	52	0	1	1	0	1	0	0
11	3	64	54	118	1	1	1	0	1	1	0

Le sintesi delle sette funzioni $z_0 .. z_7$ è immediata:

$z_0 = \overline{x_1}\,\overline{x_0}$

$z_1 = x_0$

$z_2 = x_1 + x_0$

$z_3 = \emptyset$

$z_4 = x_1 + x_3$

$z_5 = x_1$

$z_6 = x_1 x_0$

Domanda C

Si consideri la macchina a stati non completamente specificata descritta dalla tabella a lato in cui A è lo stato di reset. Si svolgano i seguenti punti:

	0	1
A	B/0	-/1
B	E/0	C/1
C	-/0	D/-
D	A/-	-/1
E	B/-	A/0

1. Si minimizzi tale macchina e si ricavi la tabella di transizione di stato della macchina minima equivalente

Per prima cosa si verifica la raggiungibilità:

$A \to B \to E$

$B \to C \to D$

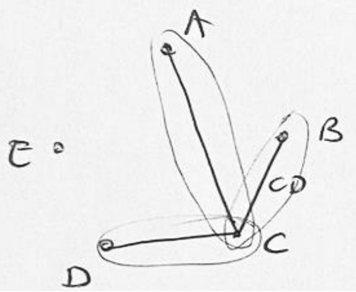
Tutti gli stati sono raggiungibili quindi si procede alla minimizzazione:

B	BE			
C	V	CD		
D	AB	AE	V	
E	X	X	AD	X
	A	B	C	D

propagando le sole non compatibilità ⟹

B	~~BE~~			
C	V	CD		
D	~~AB~~	~~AE~~	V	
E	X	X	~~AD~~	X
	A	B	C	D

Ne deriviamo il grafo di compatibilità e le classi di massima compatibilità seguenti



$\alpha = \{A, C\} : \emptyset$

$\beta = \{B, C\} : \{(C, D)\}$

$\gamma = \{C, D\} : \emptyset$

E

Si ottiene quindi la tabella di stato:

	0	1
α	β/0	γ/1
β	ε/0	γ/1
γ	α/0	γ/1
ε	β/–	α/0

$\alpha = 00$
$\beta = 01$
$\gamma = 11$
$\varepsilon = 10$

$\Longrightarrow$

	0	1
00	01/0	11/1
01	10/0	11/1
11	00/0	11/1
10	01/–	00/0

2. Si ricavino le equazioni di stato della macchina minima

Dalla tabella codificata si ricavano le equazioni di stato:

$q_1 q_0$ \ x	0	1
00	0	1
01	1	1
11	0	1
10	0	0

$q_1 q_0$ \ x	0	1
00	1	1
01	0	1
11	0	1
10	1	0

$q_1 q_0$ \ x	0	1
00	0	1
01	0	1
11	0	1
10	–	0

$q_1^* = \bar{q}_1 q_0 + \bar{q}_1 x + q_0 x$ $\quad q_0^* = \bar{q}_0 \bar{x} + q_0 x + \bar{q}_1 x$ $\quad Z = \bar{q}_1 x + q_0 x$

3. Si calcoli la frequenza massima della macchina a stati considerando le caratteristiche temporali dei diversi elementi specificati nel seguito

$T_{FF,SETUP}$	1ns	T_{NOT}	1ns
$T_{FF,HOLD}$	1ns	$T_{AND2/OR2}$	2ns
$T_{FF,CLK2Q}$	2ns	$T_{AND3/OR3}$	3ns

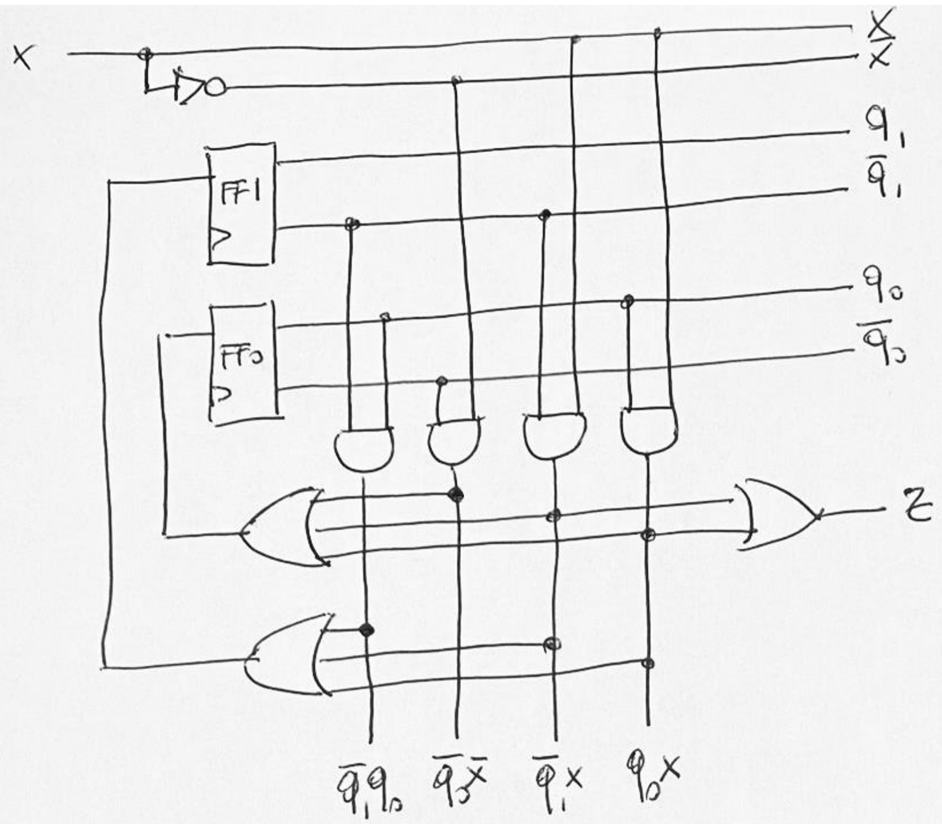
Per il calcolo della frequenza di clock si deve valutare il ritardo massimo delle reti combinatorie. Si può ipotizzare, ad esempio di usare flip-flop di tipo D, in modo tale da far coincidere le equazioni di stato con quelle di eccitazione, cioè:

$$D_1 = \bar{q}_1 q_0 + \bar{q}_1 x + q_0 x$$

$$D_0 = \bar{q}_0 \bar{x} + \bar{q}_1 x + q_0 x$$

$$Z = \bar{q}_1 x + q_0 x$$

Per comodità disegnamo la rete completa della macchina a stati:



$$T_D = T_{NOT} + T_{AND2} + T_{OR3} = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ ns}$$

$$T_{CK} = T_{SETUP} + T_{CLK2Q} + T_D = 1 + 2 + 6 = 9 \text{ ns}$$

La massima frequenza di clock è dunque:

$$f = \frac{1}{T_{CK}} = \frac{1}{9 \text{ ns}} \simeq 111{,}1 \text{ MHz}$$

Domanda D

Si consideri una macchina a stati finiti deterministica con alfabeto di ingresso $\mathrm{X} = \{\ 1, 2, 3\ \}$ e alfabeto di uscita $Z = \{\ 0, 1\ \}$ in grado di riconoscere le due sequenze $S_1 = 113$ e $S_2 = 321$, anche parzialmente sovrapposte. Si disegni il digramma degli stati di tale macchina.