Politecnico di Milano – Sede di Cremona
Anno Accademico 2022/2023

Reti Logiche – Esame – 08.06.2023

Prof. Carlo Brandolese

Cognome ________________________ **Nome** ________________________

Matricola ________________________ **Firma** ________________________

Istruzioni

1. Scrivere con cura, negli spazi sopra segnati, il proprio cognome, nome, numero di matricola e apporre la firma.
2. È vietato consultare libri, eserciziari, appunti ed utilizzare la calcolatrice e qualunque strumento elettronico (inclusi i cellulari), pena l'invalidazione del compito.
3. Il testo, debitamente compilato, deve essere riconsegnato in ogni caso.
4. Il tempo della prova è di 2 ore

Valutazione

Domanda	Voto	Note
A		
B		
C		
D		

Domanda A

Procedendo unicamente per via algebrica si dimostri che se P è un implicante della funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ allora lo è anche per la funzione:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_i x_j \qquad \forall i, j \in [1, \dots n] \mid i \neq j$$

Se P è un implicante di $f(x_1 .. x_n)$ allora
$P \cdot \overline{f(x_1 \cdots x_n)} = 0$. Calcoliamo ora:

$$P \cdot \overline{g(x_1 \cdots x_n)} = P[\overline{f(x_1 \cdots x_n) + x_i x_j}] =$$
$$= P \cdot \overline{f(x_1 \cdots x_n)} \cdot \overline{x_i x_j} = \varnothing \cdot \overline{x_i x_j} = \varnothing$$

quindi, dato che $P \cdot \overline{g(x_1 \cdots x_n)} = 0$, P è un implicante di $g(x_1 \cdots x_n)$.

Domanda B

Siano $X = [x_3 x_2 x_1 x_0]$ e $Y = [y_3 y_2 y_1 y_0]$ due numeri interi rappresentati in codifica binaria naturale. Procedendo per via strutturale si progetti una rete combinatoria in grado di calcolare il vettore $Z = [z_{n-1}, \dots z_0]$ definito come:

$$Z = \begin{cases} \dfrac{X}{8} + 6Y & X \geq 7 \\ 4X + \dfrac{Y}{2} + 16 & X < 7 \end{cases}$$

Si tenga presente che le divisioni sono da intendersi calcolate con troncamento e che il valore di Z deve essere espresso su un numero di bit sufficiente a rappresentare correttamente tutti i possibili risultati. Nella progettazione si cerchi di minimizzare l'area della rete. Completata la sintesi, si esprima l'area in termini porte logiche generiche e si calcoli il ritardo in termini numero di livelli di logica.

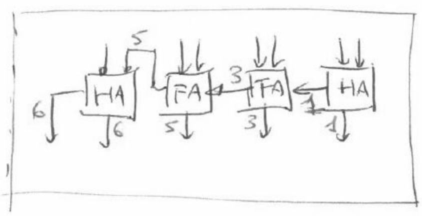
Se $X \geq 7$

$$\left\lfloor \frac{X}{8} \right\rfloor + 6Y = (X << 3) + (Y << 2) + (Y << 1)$$

$X/8$	0	0	0	0	0	x_3
$2Y$	0	y_3	y_2	y_1	y_0	0
$4Y$	y_3	y_2	y_1	y_0	0	0
	HA	FA	FA	HA	y_0	x_3

$A = 2 \cdot HA + 2 \cdot FA =$
$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 16$

$T = 6$



RC1

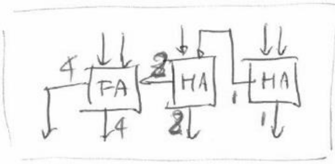
Se $x < 7 \Rightarrow x_3 = \emptyset$

$4X + Y/2 + 16 = (x<<2) + (Y>>1) + (1<<4)$

$$
\begin{array}{cccccc}
\cancel{x_3}^{\,0} & x_2 & x_1 & x_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & y_3 & y_2 & y_1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
// & FA & HA & HA & y_2 & y_1
\end{array}
$$

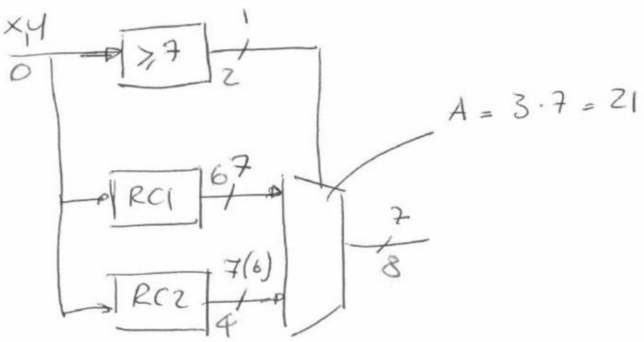
$A = 2 \cdot HA + FA = 2 \cdot 2 + 6 = 10$

$T = 4$



RC2

la condizione $x \geq 7$ è: $S = x_3 + x_2 x_1 x_0$ con area 3 e ritardo 2.



In conclusione:

$A = 16 + 10 + 3 + 21 = 50$

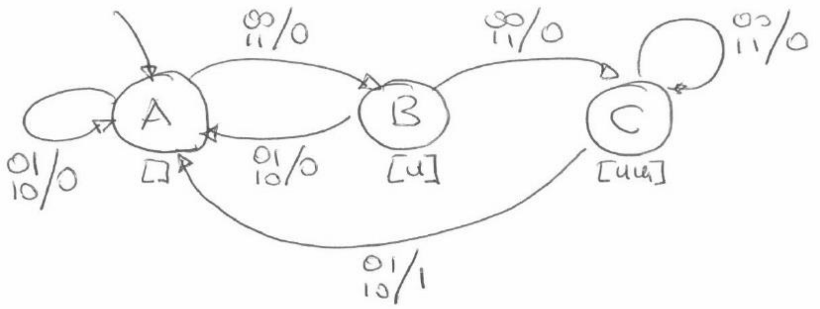
$T = 8$

Domanda C

Si consideri una macchina a stati finiti dotata di due ingressi x, y ed una uscita z in grado di riconoscere le sequenze nella forma $S = uud$, in cui il simbolo u (uguale) indica la condizione $x = y$, mentre il simbolo d (diverso) indica la condizione $x \neq y$. In tale macchina l'uscita z vale normalmente 0 ed assume valore 1 per un ciclo di clock non appena viene riconosciuta la sequenza S. Ciò premesso:

1. Si disegni il diagramma di transizione di stato della macchina minima (non è richiesto di sintetizzare la macchina descritta dal diagramma).
2. Procedendo in modo strutturale si progetti una rete sequenziale in grado di realizzare il comportamento descritto dalla specifica.

Procedendo per via comportamentale:



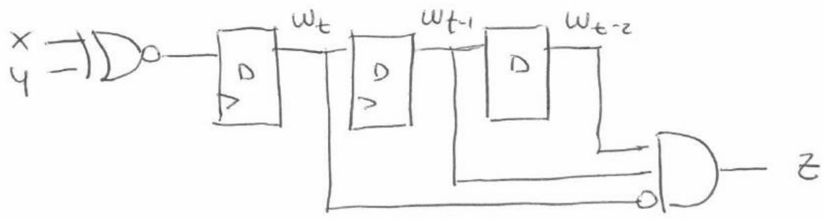
Per via strutturale si può procedere come segue. Definiamo $w = \overline{x \oplus y}$ in modo da avere:

$w = 1 \Rightarrow u$
$w = \emptyset \Rightarrow d$

per cui la sequenza da riconoscere con w come ingresso è 110 cioè

$w_t = 0 \quad w_{t-1} = 1 \quad w_{t-2} = 1$

da cui:



Domanda D

Data la macchina a stati finiti descritta dalle seguenti equazioni di eccitazione:

$$T_1 = q_1 \oplus x + \bar{q}_1 q_0$$
$$D_0 = \overline{q_1 q_0}\, \bar{x}$$
$$z = q_1 \bar{q}_0$$
$$\sigma_0 = (0,0)$$

si svolgano i seguenti punti:

1. Si ricavino le equazioni di stato della macchina data
2. Si minimizzi la macchina descritta dalle equazioni ricavate al punto 1
3. Si ricavino le equazioni di stato della macchina minima ottenuta al punto 2

$q_1^* = q_1 \oplus T_1 =$ (vedi oltre)

$q_0^* = D_0 = \overline{q_1 q_0}\,\bar{x} = (\bar{q}_1 + \bar{q}_0)\,\bar{x}$

$z = q_1 \bar{q}_0$

σ_0: $q_1 = 0$, $q_0 = 0$

$$q_1^* = q_1 \oplus [q_1 \oplus x + \bar{q}_1 q_0] = q_1 \oplus [\bar{q}_1 x + q_1 \bar{x} + \bar{q}_1 q_0]$$
$$= q_1 (\overline{\bar{q}_1 x}) \cdot (\overline{q_1 \bar{x}}) (\overline{\bar{q}_1 q_0}) + \bar{q}_1 \cdot [\bar{q}_1 x + \cancel{q_1 \bar{x}} + \bar{q}_1 q_0] =$$
$$= q_1 (q_1 + \bar{x})(\bar{q}_1 + x)(q_1 + \bar{q}_0) + \bar{q}_1 x + \bar{q}_1 q_0 =$$
$$= q_1 (\bar{q}_1 + x) + \bar{q}_1 x + \bar{q}_1 q_0 =$$
$$= q_1 x + \bar{q}_1 x + \bar{q}_1 q_0 = x(q_1 + \bar{q}_1) + \bar{q}_1 q_0 =$$
$$= x + \bar{q}_1 q_0$$

si ottiene dunque la tabella di stato seguente:

$q_1 q_0$ \ x	0	1
00	01/0	10/0
01	11/0	10/0
11	00/0	10/0
10	01/1	10/1

$\Rightarrow$ { 00 : A, 01 : B, 11 : C, 10 : D } $\Rightarrow$

Q \ x	0	1
A	B/0	D/0
B	C/0	D/0
C	A/0	D/0
D	B/1	D/1

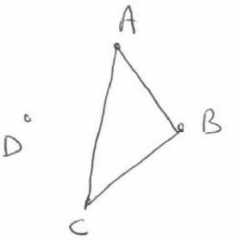
essendo $\sigma_0 = 00 = A$, tutti gli stati sono raggiungibili.

per minimizzare la macchina si procede con il metodo di Paull-Unger:

	A	B	C
B	BC		
C	AB	AC	
D	X	X	X

$\Rightarrow$

	A	B	C
B	∨		
C	∨	∨	
D	X	X	X



$\alpha = \{A, B, C\}$
$\beta = \{D\}$

la macchina minima è quindi:

Q \ x	0	1
α	$\alpha/0$	$\beta/0$
β	$\alpha/1$	$\beta/1$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow$

q \ x	0	1
0	0/0	1/0
1	0/1	1/1

si nota immediatamente che (con flip flop D):

$$\begin{cases} D = x \\ Z = q \end{cases}$$

da cui le equazioni di stato:

$$q^* = x$$
$$Z = q$$